Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Année Universitaire 2020/2021
SMIA (S1)

Examen d'algèbre 1
Durée : 1h30
Documents non autorisés

Ex. 1 — Écrire la contraposée et la négation des implications suivantes :

(i) Si $x \geq 0$ alors $f(x) < 0$;

(ii) Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Ex. 2 — Soient X et Y deux ensembles.

1) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications. Montrer que X et Y peuvent s'écrire comme réunions disjointes :

$$X = X_1 \cup X_2, \quad Y = Y_1 \cup Y_2,$$

avec $f(X_1) = Y_1$ et $g(Y_2) = X_2$ (Considérer l'application

$$\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X), \quad A \mapsto X - g[Y - f(A)]$$

et utiliser le résultat admis (voir TD) [1]).

2) En déduire que, s'il existe une injetion de X dans Y et une injection de Y dans X alors il existe une bijection de X sur Y (Théorème de Bernstein–Schröder).

---

1. Soit E un ensemble. Toute application croissante f de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ (c'est-à-dire que $X \subset Y$ entraîne $f(X) \subset f(Y)$), possède un point fixe (c'est-à-dire, il existe $X_0 \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X_0) = X_0$).